الزمرة – الحلقة - الجسم

تمرين 1

نعتبر : $E =]-1;1[$

ليكن : $(x;y)\in E^2$

نضع : $x*y = \dfrac{x+y}{1+xy}$

1- بين أن : * قانون تركيب داخلي في E

2- بين أن : $(E;*)$ زمرة تبادلية

الحل

1- لنبين أن : * قانون تركيب داخلي في E

نعتبر : $y\in E$

نعتبر الدالة : $f_y(x)=\dfrac{x+y}{1+xy}$ معرفة على $E=]-1;1[$

$$f_y'(x)=\frac{1-y^2}{(1+xy)^2}$$

بما أن : $y\in]-1;1[$ فإن : $\forall x\in]-1;1[\; : f_y'(x)>0$

إذن : f_y تزايدية على $]-1;1[$

$$f_y(]-1;1[)=]-1;1[$$

و منه : $f_y(x)\in E \quad \forall x\in E \; ; \; \forall y\in E$

يعني : $\boxed{\forall(x;y)\in E^2 \quad x*y\in E}$

إذن : * قانون تركيب داخلي في E

2- لنبين أن : $(E;*)$ زمرة تبادلية

أ- لنبين أن : * تجميعي

نعتبر : $(x;y;z)\in E^3$

$$(x*y)*z=\frac{x+y}{1+xy}*z$$

$$=\frac{\frac{x+y}{1+xy}+z}{1+\frac{x+y}{1+xy}\times z}$$

$$(x*y)*z=\frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}$$

كذلك : $x*(y*z)=\dfrac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}$

إذن : $\boxed{(x*y)*z=x*(y*z)}$

و منه : * تجميعي

ب- لنبين أن : * تبادلي

نعتبر : $(x;y)\in E^2$

لدينا : $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$

$$=\frac{y+x}{1+yx}$$

إذن : $\boxed{x*y=y*x}$

و منه : * تبادلي

ج- لبين أن * يقبل عنصرا محايدا ثم نحدده

نعتبر : $e\in E$ بحيث :

بحيث : $x*e=e*x=x \quad \forall x\in E$

بما أن * تبادلي يكفي تحديد e بحيث : $x*e=x$

$$x * e = x \Leftrightarrow \frac{x+e}{1+xe} = x$$
$$\Leftrightarrow x+e = x+x^2e;\ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow e = x^2e$$
$$\Leftrightarrow e\left(1-x^2\right)=0$$
$$\Leftrightarrow e\left(1-x^2\right)=0;\ \forall x \in E$$
$$\Leftrightarrow \boxed{e=0}$$

إذن : * يقبل عنصرا محايدا و هو 0

د- لنبين أن جميع عناصر E تقبل مماثلا بالنسبة للقانون * في E

نعتبر : $x \in E$

y مماثل لـ x يعني : $x*y=y*x=0$

بما أن * تبادلي يكفي تحديد y بحيث : $x*y=0$

$$x*y=0 \Leftrightarrow \frac{x+y}{1+xy}=0$$
$$\Leftrightarrow x+y=0$$
$$\Leftrightarrow y=-x$$

بما أن : $-x \in E$

إذن : جميع عناصر E تقبل مماثلا بالنسبة للقانون * في E

إذن : من - أ - ب – ج – د - $(E;*)$ زمرة تبادلية

تمرين2

نعتبر : $E=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2-y^2=1\right\}$

ليكن : $(x;y)\in E^2$ و $(x';y')\in E^2$

نضع : $(x;y)*(x';y')=(xx'+yy';xy'+yx')$

1- بين أن : * قانون تركيب داخلي في E

2- بين أن : $(E;*)$ زمرة تبادلية

الحل

1- * قانون تركيب داخلي في E (الحساب)

2- التجميعية و التبادلية évident

العنصر المحايد :

$$(x;y)*(e_x;e_y)=(xe_x+ye_y;xe_y+ye_x)=(x;y)$$

$$\begin{cases} xe_x+ye_y=x \\ xe_y+ye_x=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2e_x+xye_y=x^2 \\ xye_y+y^2e_x=y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_x\left(x^2-y^2\right)=x^2-y^2 \\ xe_x+ye_y=x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_x=1 \\ x+ye_y=x \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_x=1 \\ e_y=0 \end{cases}$$

إذن : $(1;0)$ هو العنصر المحايد بالنسبة * في E

مماثل $(x;y)$

أ- $x \neq 0$

$$(xx'+yy';xy'+yx')=(1;0)$$

$$\begin{cases} xx'+yy'=1 \\ xy'+yx'=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2x'+xyy'=x \\ xyy'+y^2x'=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'\left(x^2-y^2\right)=x \\ xy'+yx'=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'=x \\ xy'+yx=0 \quad x\neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'=x \\ y'=-y \end{cases}$$

مماثل $(x;y)$ هو $(x;-y)$

ب- الحالة : $x=0$ إذن : $y=1$ أو $y=-1$

$$(xx'+yy';xy'+yx')=(1;0)$$

$$\begin{cases} yy'=1 \\ yx'=0 \quad y\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'=\dfrac{1}{y} \\ x'=0 \end{cases}$$

مماثل $(0;1)$ هو $(0;1)$ و مماثل $(0;-1)$ هو $(0;-1)$

تمرين3

$(G;\times)$ زمرة غيرتبادلية (العنصرالمحايدا هو e)

(مماثل a هو a^{-1})

نعتبر : $C=\left\{a\in G \,/\, \forall x\in G \quad xa=ax\right\}$

بين أن : $(C;\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(G;\times)$

الحل

لنبين أن : $\forall(a;b)\in C \quad ab^{-1}\in C$

نعتبر : $x\in G$

$$ab^{-1}x=a\left(x^{-1}b\right)^{-1}$$
$$b\in C \Rightarrow x^{-1}b=bx^{-1}$$
$$ab^{-1}x=a\left(bx^{-1}\right)^{-1}=axb^{-1}$$
$$a\in C \Rightarrow ax=xa$$
$$\forall(a;b)\in C \quad \forall x\in G \quad ab^{-1}x=xab^{-1}$$

إذن : $\boxed{\forall(a;b)\in C \quad ab^{-1}\in C}$

ومنه : $(C;\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(G;\times)$

لدينا : $1_G\in C$ لأن : $x1_G=1_Gx \quad \forall x\in G$

إذن : $C\neq\varnothing$

تمرين 4

$(G;\times)$ زمرة $\quad a\in G$

نعتبر : $H_a=\{x\in G\ /\ xa=ax\}$

بين أن : $(H_a;\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(G;\times)$

الحل

لنبين أن : $\forall(x;y)\in H_a^2\quad xy^{-1}\in H_a$

$x\in H_a \Leftrightarrow xa=ax \Leftrightarrow a^{-1}x=xa^{-1}$

$y\in H_a \Leftrightarrow ya=ay \Leftrightarrow a^{-1}y=ya^{-1}$

$xy^{-1}a=x\left(a^{-1}y\right)^{-1}=x\left(ya^{-1}\right)^{-1}=xay^{-1}=axy^{-1}$

إذن : $\forall(x;y)\in H_a^2\quad xy^{-1}a=axy^{-1}$

ومنه : $\forall(x;y)\in H_a^2\quad xy^{-1}\in H_a$

إذن : $(H_a;\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(G;\times)$

تمرين5

نعتبر :

$$E=\left\{\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}\ /\ x\in\mathbb{R}\right\}$$

نعتبر التطبيق :

$$f:(\mathbb{R};+)\to(E;\times)$$
$$x\mapsto\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}$$

1- بين أن : E جزء مستقر من $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$

2- بين أن : f تشاكل شمولي من $(\mathbb{R};+)$ نحو $(E;\times)$

3- استنتج بنية المجموعة $(E;\times)$

4- نعتبر : $M=\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}$

احسب : $M^2\ ;\ M^3$ ثم استنتج M^n

الحل

1- لنبين أن : E جزء مستقر من $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$

نعتبر : $\left(\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix};\begin{pmatrix}\cos y & -\sin y\\ \sin y & \cos y\end{pmatrix}\right)\in E^2$

$$\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\cos y & -\sin y\\ \sin y & \cos y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos x\cos y-\sin x\sin y & -\cos x\sin y-\sin x\cos y\\ \sin x\cos y+\cos x\sin y & -\sin x\sin y+\cos x\cos y\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\cos(x+y) & -\sin(x+y)\\ \sin(x+y) & \cos(x+y)\end{pmatrix}$$

و $\begin{pmatrix}\cos(x+y) & -\sin(x+y)\\ \sin(x+y) & \cos(x+y)\end{pmatrix}\in E$

إذن : $\forall\left(\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix};\begin{pmatrix}\cos y & -\sin y\\ \sin y & \cos y\end{pmatrix}\right)\in E^2$

$$\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\cos y & -\sin y\\ \sin y & \cos y\end{pmatrix}\in E$$

و منه : E جزء مستقر من $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$

2- لنبين أن : f تشاكل شمولي من $(\mathbb{R};+)$ نحو $(E;\times)$

نعتبر : $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

$$f(x+y)=\begin{pmatrix}\cos(x+y) & -\sin(x+y)\\ \sin(x+y) & \cos(x+y)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\cos x\cos y-\sin x\sin y & -\cos x\sin y-\sin x\cos y\\ \sin x\cos y+\cos x\sin y & -\sin x\sin y+\cos x\cos y\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\cos y & -\sin y\\ \sin y & \cos y\end{pmatrix}$$

$$\boxed{f(x+y)=f(x)\times f(y)}$$

إذن : f تشاكل من $(\mathbb{R};+)$ نحو $(E;\times)$

و لدينا : $\forall\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}\in E\ \exists x\in\mathbb{R}/f(x)=\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}$

f تشاكل شمولي من $(\mathbb{R};+)$ نحو $(E;\times)$

3- استنتاج بنية المجموعة $(E;\times)$

بما أن : f تشاكل شمولي من $(\mathbb{R};+)$ نحو $(E;\times)$

و $(\mathbb{R};+)$ زمرة تبادلية

فإن : $(E;\times)$ زمرة تبادلية

4- نعتبر : $M=\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}$

حساب : $M^2\ ;\ M^3$ ثم استنتاج M^n

من : $f(x+y)=f(x)\times f(y)$

نبين بالترجع أن : $f(nx)=\left(f(x)\right)^n$

إذن : $\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos nx & -\sin nx\\ \sin nx & \cos nx\end{pmatrix}$

تمرين6

نعتبر :

$$E=\left\{\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\ /\ (a;b)\in\mathbb{R}^2;(a;b)\neq(0;0)\right\}$$

نعتبر التطبيق :

$$f : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{C}^* \\ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} & \mapsto & a+ib \end{array}$$

1- بين أن : E جزء مستقر من $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$

2 - بين أن : f تقابل

3- بين أن : f تشاكل من $(E;\times)$ نحو $(\mathbb{C}^*;\times)$

4- استنتج بنية المجموعة $(E;\times)$

الحل

1- لنبين أن : E جزء مستقر من $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$

نعتبر : $\left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix};\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}\right) \in E^2$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & -(bc+ad) \\ bc+ad & ac-bd \end{pmatrix}$$

و $\begin{pmatrix} ac-bd & -(bc+ad) \\ bc+ad & ac-bd \end{pmatrix} \in E$

إذن : $\forall \left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix};\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}\right) \in E^2$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \in E$$

ومنه : E جزء مستقر من $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$

2 - لنبين أن : f تقابل

نعتبر : $\left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix};\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}\right) \in E^2$

$$f\left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}\right) \Leftrightarrow a+ib = c+id \Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$$

$$\boxed{f\left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}}$$

إذن : f تباين (a)

نعتبر : $c+id \in \mathbb{C}^*$

لنحدد : $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in E$ بحيث : $f\left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\right) = c+id$

$$f\left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\right) = c+id \Leftrightarrow a+ib = c+id$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\right) = c+id \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

إذن : f شمولي (b)

من : (a) و (b) : f تقابل

3- بين أن : f تشاكل من $(E;\times)$ نحو $(\mathbb{C}^*;\times)$

$$f\left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} ac-bd & -(bc+ad) \\ bc+ad & ac-bd \end{pmatrix}$$

$$= (ac-bd) + i(bc+ad)$$

$$\boxed{f\left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}\right) = (a+bi)(c+di)}$$

إذن : f تشاكل من $(E;\times)$ نحو $(\mathbb{C}^*;\times)$

4- استنتاج بنية المجموعة $(E;\times)$

بما أن : f تشاكل تقابلي من $(E;\times)$ نحو $(\mathbb{C}^*;\times)$

فإن : f^{-1} تشاكل من $(\mathbb{C}^*;\times)$ من نحو $(E;\times)$

و بما أن : $(\mathbb{C}^*;\times)$ زمرة

فإن : $(E;\times)$ زمرة

ملاحظة

(مماثل $a+ib$ في $(\mathbb{C}^*;\times)$ هو $\dfrac{a}{a^2+b^2} - i\dfrac{b}{a^2+b^2}$)

(مماثل $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ في $(E;\times)$ هو $\begin{pmatrix} \dfrac{a}{a^2+b^2} & \dfrac{b}{a^2+b^2} \\ -\dfrac{b}{a^2+b^2} & \dfrac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$)

العنصر المحايد في $(\mathbb{C}^*;\times)$ هو 1

العنصر المحايد في $(E;\times)$ هو $f^{-1}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

تمرين7

$(G;*)$ زمرة العنصرالمحايدا هو e (مماثل a هو a^{-1})

التطبيق f_a معرف بما يلي :

$$f_a : \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & a*x*a^{-1} \end{array}$$

نعتبر : $F = \{f_a \ / a \in G\}$

نعتبر التطبيق :

$$f : \begin{array}{ccc} G & \to & F \\ a & \mapsto & f_a \end{array}$$

1- بين أن $(F;\circ)$ جزء مستقر من $(\mathscr{F};\circ)$

2- بين أن : f تشاكل شمولي من $(G;*)$ نحو $(F;\circ)$

3 - استنتج بنية المجموعة $(F;\circ)$

الحل

1 - لنبين أن : $(F;\circ)$ جزء مستقر من $(\mathcal{F};\circ)$

يعني : $\forall(a;b)\in G^2\quad f_a\circ f_b\in F$

نعتبر : $x\in G$

$f_a\circ f_b(x)=a*(b*x*b^{-1})*a^{-1}$

بما أن : * تجميعي و $(a*b)^{-1}=b^{-1}*a^{-1}$

فإن : $a*(b*x*b^{-1})*a^{-1}=(a*b)*x*(a*b)^{-1}$

إذن : $\forall x\in G\quad f_a\circ f_b(x)=f_{a*b}(x)$

و منه : $\boxed{\forall(a;b)\in G^2\quad f_a\circ f_b=f_{a*b}}$

وبما أن : * قانون تركيب داخلي في G

فإن : $a*b\in G$

إذن : $f_{a*b}\in F$

و منه : $f_a\circ f_b\in F$

إذن : $\forall(a;b)\in G^2\quad f_a\circ f_b\in F$

و منه : $(F;\circ)$ جزء مستقر من $(\mathcal{F};\circ)$

2- لنبين أن : f تشاكل من $(G;*)$ نحو $(F;\circ)$

نعتبر : $(a;b)\in G^2$

لدينا : $f(a*b)=f_{a*b}$

إذن : $f(a*b)=f_a\circ f_b$

إذن : f تشاكل من $(G;*)$ نحو $(F;\circ)$ $\quad(a)$

- لنبين أن : f شمولي

لدينا : $\forall f\in F\quad\exists a\in E\quad f(a)=f_a$

إذن : f شمولي (b)

ومن : (a) و (b)

f تشاكل شمولي من $(G;*)$ نحو $(F;\circ)$

3- استنتاج بنية المجموعة $(F;\circ)$

بما أن : f تشاكل شمولي من $(G;*)$ نحو $(F;\circ)$

و $(G;*)$ زمرة

فإن : $(F;\circ)$ زمرة

ملاحظة

العنصر المحايد في $(G;*)$ هو e

العنصر المحايد في $(F;\circ)$ هو $f(e)=f_e$

مماثل a في $(G;*)$ هو a^{-1}

مماثل f_a في $(F;\circ)$ هو $f(a^{-1})=f_{a^{-1}}$

تمرين 8

بين أن : $(\mathbb{Z}^2;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية

بحيث : $\forall(x;y)\in\mathbb{Z}^2$ و $\forall(x';y')\in\mathbb{Z}^2$

$$(x;y)+(x';y')=(x+x';y+y')$$

$$(x;y)\times(x';y')=(xx'+2yy';xy'+yx')$$

الحل

أ- $(\mathbb{Z}^2;+)$ زمرة تبادلية (واضح)

صفر $(\mathbb{Z}^2;+)$ هو $(0;0)$ مماثل $(x;y)$ هو $(-x;-y)$ في $(\mathbb{Z}^2;+)$

ب - $\times$ تجميعي في $\mathbb{Z}^2$ (الحساب)

ج - $\times$ تبادلي في $\mathbb{Z}^2$ (الحساب)

د - وحدة $(\mathbb{Z}^2;\times)$ هي $(1;0)$

هـ - القانون $\times$ توزيعي بالنسبة للقانون $+$ في $\mathbb{Z}^2$

بما أن $\times$ تبادلي في $\mathbb{Z}^2$

نكتفي بالبرهنة أن :

$\forall(x;y)\in\mathbb{Z}^2$ و $\forall(x';y')\in\mathbb{Z}^2$ و $\forall(x'';y'')\in\mathbb{Z}^2$

$$(x;y)\times\big((x';y')+(x'';y'')\big)=\big((x;y)\times(x';y')\big)+\big((x;y)\times(x'';y'')\big)$$

(كذلك الحساب)

من (أ - ب – ج – د - هـ) $(\mathbb{Z}^2;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية

تمرين 9

1- بين أن : $1+j+j^2=0$ بحيث : $j=e^{2i\frac{\pi}{3}}$

2- نعتبر : $E=\{z\in\mathbb{C}/\exists(a;b)\in\mathbb{R}^2\ :\ z=a+bj\}$

بين أن : $(E;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية

الحل

أ- $(E;+)$ زمرة تبادلية (واضح)

طريقة البرهنة أن : $(E;+)$ زمرة تبادلية

نبين أن : $(E;+)$ زمرة تبادلية مباشرة

أو من الأحسن نبين أن : $(E;+)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{C};+)$

و بما أن : $(\mathbb{C};+)$ زمرة تبادلية

فإن : $(E;+)$ زمرة تبادلية

ب - $\times$ قانون تركيب داخلي في E (الحساب و العلاقة $1+j+j^2=0$)

بما أن $(\mathbb{C};+;\times)$ جسم تبادلي و $E\subset\mathbb{C}$ و $\times$ قانون تركيب داخلي في E

فإن : ج - $\times$ تجميعي في في E (الحساب)

د - $\times$ تبادلي في في E (الحساب)

ج - وحدة $(E;\times)$ هي 1

هـ - القانون $\times$ توزيعي بالنسبة للقانون $+$ في E

من (أ- ب – ج – د – هـ) $(E;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية

تمرين 10

بين أن : $(\mathbb{R};*;\mathrm{T})$ جسم تبادلي

$$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2 \begin{cases} x*y=x+y-1 \\ x\mathrm{T}y=x+y-xy \end{cases}$$

الحل

أ - $(\mathbb{R};*)$ زمرة تبادلية (الحساب)

العنصر المحايد في $(\mathbb{R};*)$ هو 1

ب- $(\mathbb{R}-\{1\};\mathrm{T})$ زمرة تبادلية (الحساب)

العنصر المحايد في $(\mathbb{R};\mathrm{T})$ هو 0

ج - القانون T توزيعي بالنسبة للقانون $*$ في $\mathbb{R}$ (الحساب)

بما أن T تبادلي في $\mathbb{R}$

نكتفي بالبرهنة أن :

$$\forall(x;y;z)\in\mathbb{R}^3\quad x\mathrm{T}(y*z)=(x\mathrm{T}y)*(x\mathrm{T}z)$$

من (أ- ب – ج) $(\mathbb{R};*;\mathrm{T})$ جسم تبادلي

تمرين 11

نعتبر :

$$\mathbb{K}=\left\{\begin{pmatrix}x&y\\-5y&x+2y\end{pmatrix} \;/\; (x;y)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

بين أن : $(\mathbb{K};+;\times)$ جسم تبادلي

الحل

1- $(\mathbb{K};+)$ زمرة تبادلية (الطريقة)

- بما أن : $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+)$ زمرة تبادلية و $\mathbb{K}\subset\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$

يكفي ان نبين أن : $(\mathbb{K};+)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+)$

و منه : $(\mathbb{K};+)$ زمرة تبادلية

العنصر المحايد في $(\mathbb{K};+)$ هو $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=0_{\mathbb{M}_2(\mathbb{R})}$

2- $\left(\mathbb{K}-\left\{0_{\mathbb{M}_2(\mathbb{R})}\right\};\times\right)$ زمرة تبادلية (الطريقة)

أ- $\times$ قانون تركيب داخلي في $\mathbb{K}$ (الحساب)

$$\begin{pmatrix}x&y\\-5y&x+2y\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a&b\\-5b&a+2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}xa-5yb & xb+ya+2yb\\ -5(xb+ya+2yb) & (xa-5yb)+2(xb+ya+2yb)\end{pmatrix}$$

ب - $\times$ تبادلي في $\mathbb{K}-\left\{0_{\mathbb{M}_2(\mathbb{R})}\right\}$ (الحساب)

- بما أن $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$ حلقة واحدية و $\mathbb{K}\subset\mathbb{C}$ و $\times$ قانون تركيب داخلي في $\mathbb{K}$

فإن : ج- $\times$ تجميعي في $\mathbb{K}-\left\{0_{\mathbb{M}_2(\mathbb{R})}\right\}$

د- وحدة $\left(\mathbb{K}-\left\{0_{\mathbb{M}_2(\mathbb{R})}\right\};\times\right)$ هي $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=1_{\mathbb{M}_2(\mathbb{R})}$

هـ - لنبين أن جميع عناصر $\mathbb{K}-\left\{0_{\mathbb{M}_2(\mathbb{R})}\right\}$ تقبل مماثلا في $\mathbb{K}-\left\{0_{\mathbb{M}_2(\mathbb{R})}\right\}$

بما أن $\times$ تبادلي في $\mathbb{K}-\left\{0_{\mathbb{M}_2(\mathbb{R})}\right\}$

نكتفي بتحديد : $\begin{pmatrix}x&y\\-5y&x+2y\end{pmatrix}\in\mathbb{K}-\left\{0_{\mathbb{M}_2(\mathbb{R})}\right\}$

بحيث : $\begin{pmatrix}x&y\\-5y&x+2y\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a&b\\-5b&a+2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

نجد : $\begin{cases}ax-5by=1\\ bx+(a+2b)y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xa-5yb=1\\ xb+ya+2yb=0\end{cases}$

$5b^2+2ab+a^2\neq0$

لأن : $\Delta_b'=-4a^2<0$ و $\Delta_a'=-4b^2<0$

حل النظمة نجد : $\begin{cases}x=\dfrac{a+2b}{5b^2+2ab+a^2}\\ y=\dfrac{-b}{5b^2+2ab+a^2}\end{cases}$

من (أ- ب – ج – د – هـ) $\left(\mathbb{K}-\left\{0_{\mathbb{M}_2(\mathbb{R})}\right\};\times\right)$ زمرة تبادلية

3- القانون $\times$ توزيعي بالنسبة للقانون $+$ في $\mathbb{K}$

بما أن $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$ حلقة واحدية و $\mathbb{K}\subset\mathbb{C}$ و $\times$ قانون تركيب داخلي في $\mathbb{K}$ فإن القانون $\times$ توزيعي بالنسبة للقانون $+$ في $\mathbb{K}$

من (1- 2 – 3) $(\mathbb{K};+;\times)$ جسم تبادلي

تمرين 12 (الإستدراكية 2003)

نعتبر : $M_{(a;b)}=\begin{pmatrix}a&b\sqrt{2}\\b\sqrt{2}&a\end{pmatrix} \;/\; (a;b)\in\mathbb{Z}^2$

$$E=\left\{M_{(a;b)} \;/\; a^2-2b^2=1\right\}$$

$$A=\begin{pmatrix}3&2\sqrt{2}\\2\sqrt{2}&3\end{pmatrix}$$

1 – تحقق أن : $A\in E$

2- بين أن : E جزء مستقر من $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$

و أن قانون التركيب الداخلي $\times$ تبادلي في E

3- بين أن : جميع عناصر E تقبل مقلوبا في E بالنسبة لقانون التركيب الداخلي $\times$

4- بين أن : $(E;\times)$ زمرة تبادلية